Riemannin zeta-funktiosta

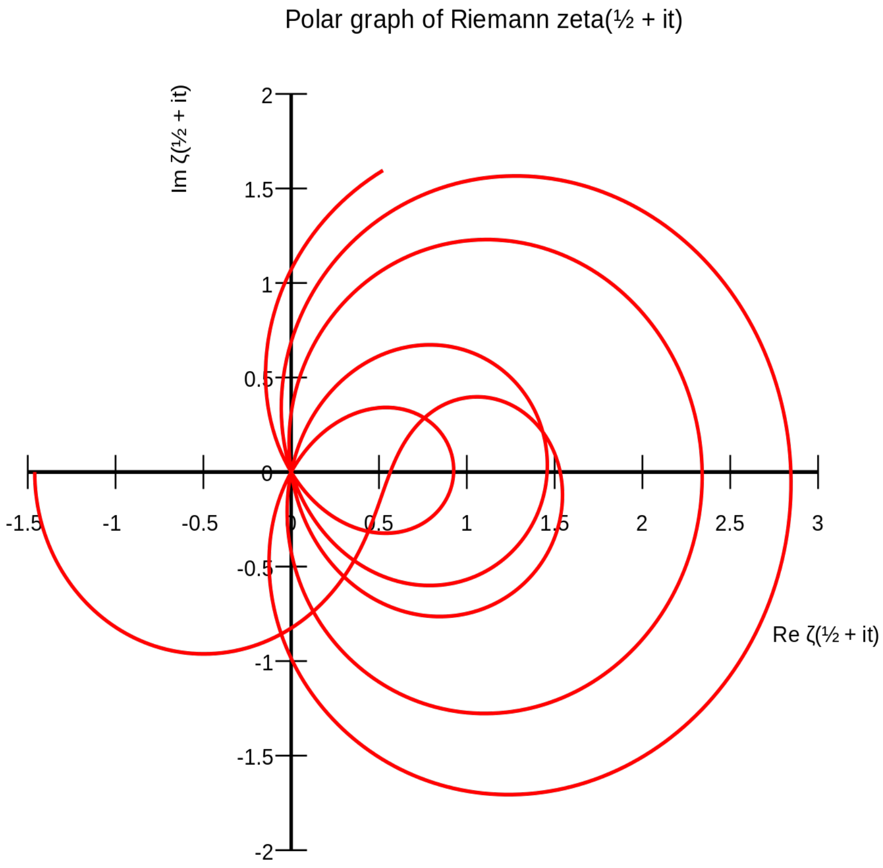
Listamedia Instute of Technology (LIT), Matematiikan ja Tilastoöyhötyksen laitos, Prof. Iisa-Kaisa Uusitonni

Funktioita on monenlaisia. On pieniä, pyöreitä, päärynänmuotoisia, kompleksiarvoisia, kattofunktioita, itseisarvoisia, paloittain määriteltyjä, derivoituvia... Tärkeintä on kuitenkin, että kaikki funktiot ovat lähtökohtaisesti kauniita.

Jotkut nyt valitettavasti kuitenkin ovat kauniimpia kuin toiset, halusit tai sitä tai et, näiden funktioiden muodostamien struktuurien takia. Yksi mielenkiintoisimmista ja erikoisimmista funktioista on ehdottomasti *Riemannin zeta-funktio.*

Tällä mystisellä funktiolla on käsittämättömän paljon mielenkiintoisia yhteyksiä kaikkeen, joita aion avata tässä pikku hiljaa. ζ-funktio on kuitenkin imo top 5 ses pättänni true kkorner kkomrade ttune trihard alaviiva isännyys funktio.

Kompleksianalyysiä, faktoja, tilastoja



Arvaa jysähti

Hieman aihetta aluksi tangentiaalisesti sivuten yleinen Dirichelitin sarja määritellään äärettömänä sarjana muotoa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

Tässä summassa $a_n, s \in \mathbb{C}$ ja $\{\lambda_n\}$ on aidosti kasvava lukujono (*kaikilla* λ_n *pätee* $\lambda_{n+1} > \lambda_n$) ja $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Analyyttislukuteoreettisessa sekä jopa kombinatorisessa viitekehyksessäkin tärkeä erikoistapaus, ns. "*tavallinen*" Dirichelitin sarja määritellään äärettömänä summana. Edellisestä yleisestä tapauksesta saamme tämän näin asettamalla termi λ_n luonnolliseksi logaritmiksi n:stä, eli $\lambda_n = ln(n)$. Tässä tapauksessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

relaatio pätee, koska tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ln(n)s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\frac{1}{n^s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Missä $s \in \mathbb{C}$ ja a_n on kompleksinen lukujono, eli funktio muotoa $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dirichletin tavallisen sarjan plus- ja kertolasku määritellään sarjalle mielivaltaisen renkaan R yli funktion $a : \mathbb{Z}^+ \to R$ mukaan. Pätee seuraavat kaavat plus ja kertolaskun suhteen:

$$D(a, s) + D(b, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (a + b)(n) n^{-s}$$

$$D(a, s) \cdot D(b, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (a \cdot b)(n) n^{-s}$$

Pätee siis normaali osittelulaki:

$$(a + b)(n) = a(n) + b(n)$$

Koska Riemannin zeta-funktio on Dirichletin sarja, voimme hyödyntää kyseisiä ominaisuuksia tutkiessamme sen hienovaraista struktuuria.

Itse Riemannin zeta-funktio on tietty Dirichelitin sarja, jossa termi $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = 1$. Summana esitettynä oletuksin $\zeta : Re > 1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(*Itse herra Riemannin aloittaman vakiintuneen tavan mukaan merkitään s eikä* x). Funktio määritellään tämän funktion analyyttisenä jatkumona koko kompleksitasolle, jossa sillä on yksi määrittelemätön piste, $\zeta(1)$, koska sarja hajaantuu kyseisessä pistessä. Hajaantuminen johtuu siitä, että havaitaan, että:

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

eli funktio paljastuu harmoniseksi sarjaksi, joka divergoi, koska jonolla $\{a_n\} = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}...\}$, $\forall n : a_{n+1} > a_n$ ja $\lim_{n \to \infty} = \infty$. Kyseisellä singulaarisella navalla on mielenkiintoisia ominaisuuksia, joista myöhemmin.

Dirichelitin sarjan ominaisuuksia hyödyntäen tiedämme, että summamuotoisen sarjan voi kirjoittaa ekvivalentisti tulomuodossa (ns. Eulerin tulo). Aritmetiikan peruslauseen mukaan jokaisen luvun $x > 1 : x \in \mathbb{N}$ voi kirjoittaa alkulukujen tulona. Käytetään tätä apuna kyseisen tulomuodon löytämiseksi. Algebrallisen manipulaation jälkeen havaitaan:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...$$

poistetaan luvun 2 monikerrat (Eratostheneen seula-algoritmi), saadaan

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + ...$$

josta seuraa

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^s}\zeta(s) = (\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...) - (\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + ...)$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + ...$$

Kun jatketaan algoritmin soveltamista poistaen luvun *3,4,5...* monikerrat, saadaan:

$$...(1 - \frac{1}{11^s})(1 - \frac{1}{7^s})(1 - \frac{1}{5^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 \quad || \cdot \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$\Leftrightarrow \zeta(s) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s})(1 - \frac{1}{7^s})(1 - \frac{1}{11^s})...}$$

Kun $Re(s) > 1$, niin

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s})(1 - \frac{1}{7^s})(1 - \frac{1}{11^s})...}$$

Koska kun $n > 1$, pätee $n^{s+1} > n^s$ ja toisaalta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, niin

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = \frac{1}{(1-0)(1-0)(1-0)...} = \frac{1}{(1)(1)(1)...} = \frac{1}{1} = 1$$

Koska ζ-funktio on Dirichelitin sarja, seuraa suoraan kyseisestä suppenemisesta, että voimme kirjoittaa funktion tulomuodossa alkulukujen tulona ja seuraava yhtälö pätee $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Tämän (verrattaen) simppelin kaavan jälkeen voimme määrittää funktion koko kompleksitasolle.

Bernhard Riemann (*jonka mukaan ζ on nimetty*), havaitsi, että sen voi määritellä koko kompleksitasolle (*lukuunottamatta yksittäistä napaa* $\zeta(1)$) analyyttisenä jatkumona. Etsitään nyt ζ-funktion analyyttinen jatkumo. Mielenkiintoisesti mukaan tulee todennäköisyysteoriasta tuttu kertoma ja gammafunktio. Muistetaan, että kun $n \in \mathbb{N}$:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

Tässä $n!$ on luvun n kertoma, joka kertoo vastauksen kysymykseen "*kuinka monella tapaa n-alkioisen joukon voi järjestää jonoon*"? Tämä juontaa tietysti mielikuvituksen laukkaamaan. Entä jos $n \in \mathbb{R}$? Tai jopa $n \in \mathbb{C}$? Tätä varten on kehitetty gammafunktio, jolle pätee:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Tätä ei tietenkään ole määritelty alueessa $\mathbb{Z}^-$, mutta se voidaan laajentaa koko positiiviselle kompleksitasolle $(Im(n) > 0 : Re(n) > 0)$ äärettömänä integraalina kaavana

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Tätä gammafunktiota tarvitsemme zeta-funktion laajennukseen, Riemannin zetafunktion funktionaaliyhtälöön. Ensinnäkin $s \in \mathbb{C} : s = \sigma + it$ (*merkintä vakiintuneen tavan mukaan sigma, t eikä a+bi*). Johdetaan funktionaaliyhtälö, joka pätee koko kompleksitasossa, eikä vain $Re > 1$. Jos $\sigma > 0$, niin

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1} e^{n^2\pi x} dx = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{n^s \pi^{\frac{s}{2}}}$$

Koska jos asetetaan $u = \frac{s}{2}$ ja tällöin $dx = \frac{2x^{1-\frac{s}{2}}}{s} du$, joten $x = u^{\frac{2}{s}}$, eli

$$\int x^{\frac{1}{2}s-1} e^{n^2\pi x} dx = \frac{2}{s} \int e^{\pi n^2 u^{\frac{2}{s}}} du$$

Taas asetetaan $v = \pi n^2 u^{\frac{s}{2}}$, seuraa, että $du = \frac{1}{n^s \pi^{\frac{s}{2}}} dv$ (lisää substituutiota). Täten

$$\frac{2}{s} \int e^{\pi n^2 u^{\frac{2}{s}}} du = \frac{1}{n^s \pi^{\frac{s}{2}}} \int e^{v^{\frac{2}{s}}} dv$$

Tämähän on siis epätäydellinen gammafunktio (vähennettynä integrandin edessä olevat termit).

$$\int e^{v^{\frac{2}{s}}} dv = -\frac{s\Gamma(\frac{s}{2}, -v^{\frac{2}{s}})}{2(-1)^{\frac{s}{2}}} + C$$

nyt vaan tiputellaan muuttujanvaihdot pois

$$\frac{2}{s} \int e^{\pi n^2 u^{\frac{2}{s}}} du = -\frac{\Gamma(\frac{s}{2}, -\pi n^2 u^{\frac{2}{s}})}{n^s (-1)^{\frac{s}{2}} \pi^{\frac{s}{2}}} + C \quad ||v = \pi^{\frac{s}{2}} n^s u$$

$$-\frac{\Gamma(\frac{s}{2}, -\pi n^2 u^{\frac{2}{s}})}{n^s (-1)^{\frac{s}{2}} \pi^{\frac{s}{2}}} + C = -\frac{\Gamma(\frac{s}{2}, -\pi n^2 x)}{n^s (-1)^{\frac{s}{2}} \pi^{\frac{s}{2}}} + C \quad ||u = x^{\frac{s}{2}}$$

$$-\frac{\Gamma(\frac{s}{2}, -\pi n^2 x)}{n^s (-1)^{\frac{s}{2}} \pi^{\frac{s}{2}}} + C = \int x^{\frac{1}{2}s-1} e^{n^2\pi x} dx$$

Viimeinen relaatio pätee. Alkuoletuksenamme $\sigma > 0$. Observoidaan, että integraalifunktion arvo on 0 kohdassa nolla. Seuraa integraalifunktion raja-arvosta lähestyttäessä positiivista äärettömyyttä, että

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx = \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{n^s\pi^{\frac{s}{2}}}$$

Kuvitellaan, että sarja suppenee absoluuttisesti. Tällöin reuna-ehtona on $\sigma > 1$. Seuraa:

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)}{\pi^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-n^2\pi x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}dx$$

$$\Leftrightarrow \zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}dx$$

Muunnetaan lopussa olevan summan muotoa seuraavasti; koska e^x on aidosti kasvava:

$$e^x\frac{d}{dx} = e^x > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \wedge \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \wedge \forall x \in \mathbb{R}, : \epsilon > 0 : \epsilon < x \Rightarrow e^{x+\epsilon} > e^x$$

Voidaan kirjoittaa seuraava summa toiseen muotoon

$$\sum_{-\infty}^\infty e^{n^2\pi x} = \frac{\sum_{-\infty}^\infty e^{\frac{n^2\pi}{x}}}{\sqrt{x}}$$

Tämän avulla saadaan vihdoin johdettua zeta-funktion laajennus, koska

$$2(\sum_{n=1}^\infty e^{n^2\pi x}) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(2(\sum_{n=1}^\infty e^{n^2\pi(\frac{1}{x})}) + 1)$$

, niin saadaan intensiivisten laskutoimituksien kautta:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^\infty e^{n^2\pi x}dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^\infty e^{n^2\pi x}dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}(\frac{1}{\sqrt{x}}(\sum_{n=1}^\infty e^{n^2\pi(\frac{1}{x})}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2})dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^\infty e^{n^2\pi x}dx$$

koska

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{dx}{x^s}$$

$$= \lim_{y\to\infty}\frac{1^{1-s} - y^{1-s}}{s-1} = \frac{1}{s-1}$$

niin

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}(\frac{1}{\sqrt{x}}(\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\pi(\frac{1}{x})}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2})dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\pi x}dx$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\pi(\frac{1}{x})}dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\pi x}dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{1}-1})\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\pi x}dx = \Psi$$

lopuksi funktionaaliyhtälöksi saadaan sievennettynä

$$\Psi = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})\zeta(1-s)$$

Funktionaaliyhtälön lähtöjoukko on kompleksitaso lukuunottamatta 1 ja maalijoukko koko kompleksitaso kaikessa kauneudessaan. Funktio suppenee kaikilla s analyyttisen jatkumon takia. Zeta-funktiosta voi johtaa mielenkiintoisen sarjakehitelmän. Kun $x \in \mathbb{R}, 1 > x > -1$, pätee, että:

$$ln(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Tämän ominaisuuden voi olettaa liittyvän Eulerin tulomuotoon zeta-funktiosta ja mahdollisesti alkulukufunktioon, jota käsitellään myöhemmin.

Lopulta on olemassa vielä navaton (*funktionaaliyhtälölläkin on napa* $\zeta(1)$), symmetrinen versio funktionaaliyhtälöstä, Riemeannin xhii-funktio ξ, joka määritellään $s \in \mathbb{C}$ yhtälöllä:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)$$

Tällä on yhtäläläisyyksiä zeta-funktion ei-triviaaleihin nollakohtiin, mutta sivuutetaan ne tässä dokumentissa ja käsitellään pääasiassa funktionaaliyhtälöä.

Tässä vaiheessa tarkkasilmäiselle lukijalle voi juolahtaa mieleen, että miksi tämmönen funktio on edes mielenkiintoinen. Lähtökohdat ovat lukuteoriassa. Matematiikassa on käytetty miljoonia miestyövuosia pohtimaan sinänsä yksinkertaista kysymystä:

" *Olkoon $x \in \mathbb{N}$. Montako alkulukua $p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{P}$ on ennen lukua x? Ekvivalentisti mikä on joukon $\{p_1, p_2, ..., p_n\} := P$ kardinaliteetti $card(P)$?* ".

eli toisin sanoen:

$$x \in \mathbb{N} : p_n \in \mathbb{P} : p_1 = 2, p_2 = 3, ... : n \geq p_n > p_{n-1} : |\{p_1, p_2, ..., p_n\}| =?$$

Tähän kysymykseen käytetään *alkulukufunktiota*, jota yleensä merkitään $\pi(n)$. Alkulukufunktio ei ole historiallisesti yksikäsitteinen, mutta modernissa lukuteoreettisessä analyysissä käytetään funktiota

$$\pi(x) = \int_0^x \frac{dt}{ln(t)} + O(x^{\frac{1}{2}} ln(x))$$

Historiallisesti myös suhteellisen hyvä arvio tästä on

$$\pi(x) \approx \frac{x}{ln(x)}$$

Käytetään yleensä tosin merkintää (*pertubaatioteoriasta tuttu, luetaan* $\pi(x)$*on asymptoottinen* $\frac{x}{ln(x)}$*:seen*)):

$$\pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$$

Alkulukulauseen mukaan

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{\pi(x)}{\frac{x}{ln(x)}} = 1$$

Johtuen alkulukulauseesta, tämä tunnetaan alkulukujen jakautumisen asymptoottisena lakina. Parempiakin arvioita on (*hukkuvan lukuteoreetikon viimeiset sanat logloglogloglogloglog*) ja sopivan approksimaation valitsemaksi täytyy verrata tietysti aikaa ja tarkkuusvaatimusta ajan funktiona.

Alkulukufunktion virhetermi $O(x^{\frac{1}{2}} ln(x))$ liittyy olennaisesti Riemannin zetafunktioon. Tiedetään, että alkulukufunktio antaa eksaktin arvon, mutta pystytä varmasti todistamaan, että eksakti arvo pätee kaikilla n, koska virhetermi olettaa, Riemannin hypoteesi pätee, itse yhtälöä siis ei ole voitu vielä edes todistaa.

Tästä päästääkin Riemannin hypoteesiin. Hypoteesi olettaa, että kaikki Riemannin zeta-funktion ei-triviaalit nollakohdat omistavat reaaliosan $\sigma = \frac{1}{2}$. Tätä ei ole pystytty vielä todistamaan, mutta tiedetään, että jokaiselle potentiaaliselle ei-triviaalille nollakohdalle pätee $0 < \sigma < 1$. Suora $Re(s) = \frac{1}{2}$ tunnetaan "kriittisenä linjana". Tämän todistamisesta on luvattu miljoona dollaria, joten todistetaan seuraavaksi Riemannin hypoteesi. Todistus:

Olkoon $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n$ C^∞*-luokan zetafunktioita. Olkoon* F *algebralliseti suljettu kunta, ja* $\Psi_k : F \to \mathbb{C}$*. Olkoon* X *kompakti orientoitu Kählerin monisto, jolla on sisätulo* $\langle\theta, \omega\rangle$ *ja sisätuloavaruus* X_s*. Permutaatioryhmällä* $sym(M)$ *saadaan diskreetti symmetria...*

Juu ei ehkä kuitenkaan, mutta palataan alkulukufunktioon. Riemann esitti, että alkulukufunktion virhetermin pystyy korjaamaan omalla alkulukufunktiollaan $J(x)$, joka määritellään näin:

$$J(x) = Li(x) - \sum_p^\infty Li(x^\rho) - log(2) + \int_x^\infty \frac{1}{t(t^2-1)log(t)} dt$$

Tässä $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{ln(t)}dt$. Huom. $\int_x^\infty \frac{1}{t(t^2-1)log(t)}dt = 0$, kun $x < 2$ (ei ole olemassa alkulukua, joka on alle 2). x^ρ on periodinen logaritminen integraali, joka on x^ρ, josta on otettu logaritminen integraali ja joka summaa ρ:n "yli". Nämä ρ ovat zeta-funktion nollakohdat! Eksakti relaatio zeta-funktioon on:

$$\frac{1}{s}(log(\zeta(s))) = \int_0^\infty J(x)x^{-s-1}dx$$

On pystytty todistamaan, että mikäli Riemannin hypoteesi pätee, tämä on paras arvio alkulukujen määrästä ennen lukua x. Myöskään yhtään nollakohtaa, joka ei ole triviaali ja on muualla, kuin reaaliosassa 1/2, ei ole löydetty, nollakohtia reaaliosassa on numeerisesti löydetty (numeerisesti todistettu) tietokonealgoritmeillä ainakin lukuun 10^{24} asti.

"Zeta-funktio" on hieman häilyvä termi, mutta yleisesti zeta-funktiona pidetään ζ-funktion kaltaisia funktioita, joilla on tavallinen Diricletin sarja, ne pystytään esittämään Eulerin tulona alkulukujen yli ja niillä on analyyttinen jatkumo ja funktionaaliyhtälö. Lisäksi kriittisen linjan symmetriaa voidaan pitää zetamaisena luomuksena.

Tällaisia funktioita on todistettu olevan ääretön määrä ja Riemannin hypoteesin todistus-yritykset usein kohdistuvat samankaltaisen funktion löytymiseen, josta seuraa, että voidaan todistaa x y ja z ja lopulta näiden seurauksena

$$ker(\zeta) = \{-2n, 0i\} \cup \{\frac{1}{2}, i(t)\}$$

(*Riemannin hypoteesi, missä t on imaginääriosan reaaliarvo nollakohdassa ja* $n \in \mathbb{N}$)

Riemannin zeta-funktion voi myös esittää mielenkiintoisesti Hadamardin tulona ei-trivialien nollakohtien tulona Weierstrassin tulolauseen ansiosta:

$$\zeta(s) = \frac{e^{(ln(2\pi)-1-\frac{\gamma}{2})s}}{2(s-1)\Gamma(1+\frac{s}{2})}\prod_\rho(1-\frac{s}{\rho})e^{\frac{s}{\rho}}$$

Tässä γ on Eulerin-Mascheronin vakio, mikä saadaan zeta-funktiosta ja on yksi mielenkiintoinen zeta-funktion arvo. Eulerin antama kaava määrittelee vakion

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n})) \tag{1}$$

Arvo on kriittisessä yhteydessä zeta-funktioon. Koska:

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

selvästi hajaantuu ja

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\zeta(1+\epsilon) = \infty$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^-}\zeta(1+\epsilon) = -\infty$$

Toispuoleiset raja-arvot ovat, funktio on epäjatkuva $\zeta(1)$. Tämä napa voidaan eliminoida xhii-funktiolla $\xi(1) = \frac{1}{2}$, mutta normaaliin funktionaaliyhtälöön saamme arvon γ eliminoimalla zeta-funktion kompleksihaara , eli γ= Eulerin-Masc heronin vakio= zeta-funktion principaaliarvo kohdassa 1.

Tutkitaan yleisesti muita Zeta-funktion mielenkiintoisia arvoja.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Mitä piillä ja zetafunktiolla on tekemistä toistensa kanssa? Tämä tunnetaan Baselin ongelmana, jonka Euler todisti seuraavaan tapaan kauan ennen kuin zeta-funktiota edes käsiteltiin nykyisessä viitekehyksessä. Hieman modernimpi todistus perustuu Fourier-analyysiin. Ensinnäkin:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Todetaan ensin, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} - (-\frac{\pi^3}{3}) = \frac{2\pi^3}{3}$$

Parsevalin identiteetin kautta (kys. funktio on neliö-integroituva) suora seuraus on, että

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (|\frac{i(-1)^n}{n}|)^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx)\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = (\frac{2\pi^3}{3})\frac{1}{4\pi} = \frac{2\pi^3 \cdot 1}{3 \cdot 4\pi} = \frac{2\pi^3}{12\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Itse asiassa kaikki parilliset reaaliarvoiset poisitiiviset syötteet saadaan kaavalla ($n \in \mathbb{Z}^+$):

$$\zeta(2n) = \frac{2\pi^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2 \cdot (2n)!}$$

Tässä B on Bernoullin luku, jonka aste on $2n$. Bernoullin luvut määritellään rekursiivisesti kaavalla, lähtöoletuksena $B_1 = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = n+1 \Leftrightarrow B_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{B_k}{n-k+1}$$

Missä on normi binomikaava

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$

Rekursiokaavaa soveltamalla saadaan lukujono

$$B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}...$$

Näillä on sovelluksia lukuteoriassa. Ylläolevassa jonossa luvut on positiivisen määritelmän mukaan määriteltyjä, yleensä merkitään B_n^+, koska luvut voi määritellä alkavan $B_1^{\pm} = \pm\frac{1}{2}$. Positiivisten parillisten lukujen kaavalla voidaan myös laskea $\zeta(0)$.

$$\zeta(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1...$$

Tulkitsemalla hienovaraisesti voisi sanoa, että eihän tässä ole mitään järkeä, täähän on vaan ∞? Ramanujanin summauksen mukaan (ζ-funktion funktionaaliyhtälön tapauksessa) voimme kuitenkin saada oikean arvon tälle. Funktionaaliyhtälön yksi esitystapa on analyyttisen jatkumon avulla kun s=0:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

$$\Rightarrow \zeta(0) = 2^s \pi^{s-1} sin(\frac{\pi s}{2})(1)\zeta(1-s)$$

$$= \frac{1}{\pi} 2^s sin(\frac{\pi s}{2})\zeta(1-s) = \frac{1}{\pi} sin(\frac{\pi s}{2})\zeta(1-s)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{s\to 0} sin(\frac{\pi s}{2})\zeta(1-s) = \frac{1}{\pi} \lim_{s\to 0}(\frac{\pi s}{2} - \frac{\pi s^3}{48} + ...)(-\frac{1}{s} + ...) = -\frac{1}{2}$$

Tämä saadaan ehkä hiukan intuitiivisemmäksi Ramanujanin summaatiolla. Koska

$$1 - 1 + 1 - ... = \frac{1}{2}(\mathcal{R})$$

niin

$$1 + 1 + 1 + ... = -\frac{1}{2}(\mathcal{R})$$

Täähän on periaatteessa täyttä huuhaata, mutta on yleisesti hyväksytty näin ja mielenkiintoisesti fysiikassa on useita tapauksia, joissa kyseinen summa oletetaan äärelliseksi arvoksi 1/2. Myöskin periaatteesa $\lim_{s\to 0} sin(x) = 0$, mutta eihän tossa mitään hauskaa muuten ole.

Erikoistapauksen $\zeta(1)$ jälkeen voitanee mainita positiiviset reaaliarvoiset parittomat kokonaisluvut, jotka ovat kaikki määriteltyjä, koska sarja suppenee absoluuttisesti $Re > 1$. Näiden laskeminen on huomattavasti haastavampaa kuin positiivisten. Mainittakoon, että $\zeta(3)$ =Aperyn vakio=1.2020569...

Irraationaalisten lukujen teoriaan liittyen täytyy mainita, että on hypotesoitu, että zeta-funktion arvot parittomissa positiivissa syötteissä $\zeta(2k+1)$ ovat algebrallisesti riippumattomia.

Negatiivisissä parittomissa luvuissa saadaan laskettua taas Bernoullin lukujen avulla kaavalla

$$n \in \mathbb{N} : \zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

Asiasta kuudenteen mikä ero on triviaalilla ja ei-triviaalilla nollakohdalla? Triviaalit kohdat määrittelee

$$\zeta(-2n) = 0$$

koska

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

astetetaan $s = -2n$ ja lasketaan

$$\zeta(-2n) = 2^{-2n} \pi^{(-2n)-1} sin(\frac{\pi - 2n}{2}) \Gamma(1-(-2n)) \zeta(1-(-2n))$$

Gammafunktion ominaisuuksista ja sinifunktion parittomuudesta seuraa, että

$$\forall x : sin(-x) = -sin(x)$$

$$\Gamma(1-(-2n)) = \Gamma(1+2n) = 2n!$$

joten

$$\zeta(-2n) = 2^{-2n} \pi^{(-2n)-1} sin(\frac{\pi - 2n}{2}) \Gamma(1-(-2n)) \zeta(1-(-2n))$$

$$\Rightarrow \zeta(-2n) = -2^{-2n} 2n! \pi^{(-2n)-1} sin(\pi n) \zeta(1+2n)$$

Tästä ei mikään ole ääretön arvo, joten sinifunktion arvosta kohdassa $n\pi$ seuraa, että koska

$$sin(\pi n) = 0$$

niin

$$\zeta(-2n) = 0 \Rightarrow \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6), ... = 0$$

Tässä täytyy sivuossa huomata, että teoriassa seuraavalle summalle pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-2n}} = 1^{2n} + 2^{2n} + ... = \infty$$

Mutta tämä ei päde, koska zeta-funktio on määritelty summana näin vain $Re >$ 1, muussa kompleksitasossa sen määrittelee funktionaaliyhtälö, ei summa!

Takaisin! Analyysiä! Zeta-funktion yleinen derivaattafunktio on alueessa $Re > 1$

$$\zeta' = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^s}$$

Tämä on derivoitu (hehe) näin:

$$\frac{d}{ds}\zeta = \frac{d}{ds}(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} n^{-s}$$

$$= \zeta' = \sum_{n=1}^{\infty}(-ln(n)n^{-s})$$

$$= \zeta' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^s}$$

Koska $ln(1) = 0$ ja $\sum_1^1 \frac{ln(1)}{n^1} = \sum_1^1 \frac{ln(1)}{1^1} = \frac{0}{1} = 0$, niin

$$\zeta' = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^s} : Re > 1$$

Spesiifejä arvoja voi metsästää raja-arvojen avulla, mutta sivuutetaan ne. Entäs ne ei-triviaalit nollakohdat? Ne on löydettävä numeeris-analyyttisesti, jos joku löytäisi niin teoriassa Riemannin hypoteesin voisi (*ehkä*) todistaa sillä. Näitä metästetään esim kaavalla

$$\zeta(s) = \frac{s^{s-1}}{s-1} - 2^s \int_0^{\infty} \frac{sin(s\ arctan(t))}{(1+t^2)^{\frac{s}{2}}(e^{\pi t}+1)}$$

Ei ole tehty ihmisille. Teoriassa on ihan helppoa, mutta koita nyt integroida tota niin ei se olekkaan. Periaatteessa voi approksimoida niinkin helposti kuin (*sen tunnetuimman*) väliarvolauseen ja siitä johdetun Bolzanon lauseen hyödyntäminen. Lopuksi täytyy sanoa, että zeta-funktion avulla voi johtaa psykoottisia asioita kuten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)} = ln(2\pi) - 1$$

$\Rightarrow$??? *ehkä tarkottaa 3. mialmansota tuomion päivänä 21.12.2012 ja ennustaa Nibirun kiertoradan Jupiterin ja Saturnuksen summana*

Lähteet

Artius Mattius Lauriuksen (s. 1961) ylivoimaiset, ilmiömäisen fantastiset matemaattiset mallit.